Correction des travaux dirigés de
Machine learning
Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Université Paris sciences et lettres

Joon Kwon

vendredi 21 avril 2023

Exercice 1. —

1)

$$\begin{aligned}\langle w, v\rangle + b &= \langle w, x - (\langle w, x\rangle + b)w\rangle + b\\ &= \langle w, x\rangle - (\langle w, x\rangle + b)\left\|w\right\|_2^2 + b\\ &= 0,\end{aligned}$$

car $\left\|w\right\|_2 = 1$ par hypothèse.

2) On a

$$\begin{aligned}\min_{\substack{x'\in\mathbb{R}^d\\ \langle w,x'\rangle + b}} \left\|x - x'\right\|_2 \leqslant \left\|x - v\right\|_2 &= \sqrt{\langle x - v, x - v\rangle}\\ &= \sqrt{\langle(\langle w, x\rangle + b)w, (\langle w, x\rangle + b)w\rangle}\\ &= \sqrt{(\langle w, x\rangle + b)^2\left\|w\right\|_2^2}\\ &= \left|\langle w, x\rangle + b\right|.\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\|x-u\|_2^2 &= \|x-v+v-u\|_2^2 \\ &= \|x-v\|_2^2 + 2\langle x-v, v-u\rangle + \|v-u\|_2^2 \\ &\geqslant \|x-v\|_2^2 + 2\langle x-v, v-u\rangle .\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\langle x-v, v-u\rangle &= (\langle w, x\rangle + b)\langle w, v-u\rangle = (\langle w, x\rangle + b)(\langle w, v\rangle - \langle w, u\rangle) \\ &= (\langle w, x\rangle + b)(-b+b) = 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4) On a donc

$$\min_{\substack{x'\in\mathbb{R}^d \\ \langle w, x'\rangle + b}} \|x-x'\|_2 = |\langle w, x\rangle + b| .$$

Exercice 2. —

1) Du fait que $(\hat{w}, \hat{b})$ est une solution de $(*)$, il découle que $\mu > 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}h_{\tilde{w},\tilde{b}}(x) &= \operatorname{sign}(\langle \tilde{w}, x\rangle + \tilde{b}) = \operatorname{sign}(\langle \mu\hat{w}, x\rangle + \mu\hat{b}) \\ &= \operatorname{sign}(\mu(\langle \hat{w}, x\rangle + \hat{b})) = \operatorname{sign}(\langle \hat{w}, x\rangle + \hat{b}) = h_{\hat{w},\hat{b}}.\end{aligned}$$

2) $(\tilde{w}, \tilde{b})$ satisfait les contraintes de $(**)$: en effet, pour tout $i \in [n]$, on a

$$\begin{aligned}y_i(\langle \tilde{w}, x_i\rangle + \tilde{b}) &= y_i(\langle \mu\hat{w}, x_i\rangle + \mu\hat{b}) = \mu y_i(\langle \hat{w}, x_i\rangle + \hat{b}) \\ &= \left(\min_{i'\in[n]} y_{i'}(\langle \hat{w}, x_{i'}\rangle + \hat{b})\right)^{-1} \left(y_i \left\langle \hat{w}, x_i + \hat{b}\right\rangle\right) \\ &\geqslant 1.\end{aligned}$$

Montrons que $\tilde{w}$ minimise la fonction objectif $w \mapsto \|w\|_2$. Soit $(w, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ qui satisfait également les contraintes de $(**)$:

$$\forall i \in [n], \quad y_i(\langle w, x_i\rangle + b) \geqslant 1,$$

et montrons $\|w\|_2 \geqslant \|\tilde{w}\|_2$. On considère $w_0 = w/\|w\|_2$ et $b_0 = b/\|w\|_2$. On a alors $\|w_0\| = 1$ et pour tout $i \in [n]$,

$$y_i(\langle w_0, x_i\rangle + b_0) = \frac{1}{\|w\|_2} y_i(\langle w, x_i\rangle + b) > 0.$$

Autrement dit, (w_0, b_0) satisfait les contraintes de $(*)$. Donc, $(\hat{w}, \hat{b})$ étant par définition solution de $(*)$ on a :

$$\min_{i\in[n]} \left|\langle \hat{w}, x_i\rangle + \hat{b}\right| \geqslant \min_{i\in[n]} \left|\langle w_0, x_i\rangle + b_0\right|.$$

En remplaçant ci-dessus w_0 et b_0 par leurs définitions, on a :

$$\begin{aligned}\min_{i\in[n]} \left|\langle \hat{w}, x_i\rangle + \hat{b}\right| &\geqslant \min_{i\in[n]} \left|\left\langle \frac{w}{\|w\|_2}, x_i\right\rangle + \frac{b}{\|w\|_2}\right| = \frac{1}{\|w\|_2}\left(\min_{i\in[n]} \left|\langle w, x_i\rangle + b\right|\right) \\ &\geqslant \frac{1}{\|w\|_2},\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que (w, b) satisfait par définition les contraintes de $(**)$ et que $y_i \in \{-1, 1\}$. On a donc

$$\|w\|_2 \geqslant \left(\min_{i\in[n]} \left|\langle \hat{w}, x_i\rangle + \hat{b}\right|\right)^{-1} = \mu = \mu\,\|\hat{w}\| = \|\tilde{w}\|,$$

D'où le résultat.