Travaux dirigés de
Machine learning
Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Université Paris sciences et lettres

Joon Kwon

vendredi 28 avril 2023

Exercice 1. — Soit $K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^2, \quad K(x, x') = \langle x, x' \rangle^2.$$

Montrer qu'il existe une application de redescription $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont K est le noyau.

Exercice 2. — *Noyau polynomial.* — Soit $d, m \geqslant 1$ des entiers et $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \quad K(x, x') = \langle x, x' \rangle^m.$$

Montrer que K est un noyau.

Exercice 3. — *Noyau gaussien.* — On considère $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad K(x, x') = e^{-\frac{1}{2}(x-x')^2}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que K est un noyau.

1) Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on notera $(u_m)_{m \geqslant 0}$ ses composantes. Soit $\tilde{\mathscr{X}}$ l'ensemble défini par :

$$\tilde{\mathscr{X}} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \text{la série } \sum u_m^2 \text{ converge} \right\}.$$

Soit $u, v \in \tilde{\mathscr{X}}$. Montrer que la série $\sum u_m v_m$ converge.

2) Montrer que $\tilde{\mathscr{X}}$ est un espace vectoriel.

3) Pour $u, v \in \tilde{\mathscr{X}}$, on définit

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{\mathscr{X}}} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m v_m.$$

Montrer que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\tilde{\mathscr{X}}}$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathscr{X}}$.

4) Trouver une application $\psi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathscr{X}}$ telle que :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{K}(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_{\tilde{\mathscr{X}}}.$$