

CORRECTION DES TRAVAUX DIRIGÉS DE  
**MACHINE LEARNING**  
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES  
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

Joon Kwon

vendredi 12 mai 2023



**EXERCICE 1.** — Soit  $w_*$  la projection orthogonale de  $\hat{w}$  sur  $\text{Vect}_{i \in [n]} \psi(x_i)$ . Il existe donc  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$w_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i).$$

Et puisque  $\hat{w} - w_* \in (\text{Vect}_{i \in [n]} \psi(x_i))^\perp$ , on a pour tout  $i \in [n]$  :

$$\langle \hat{w} - w_*, \psi(x_i) \rangle = 0,$$

autrement dit :

$$\langle \hat{w}, \psi(x_i) \rangle = \langle w_*, \psi(x_i) \rangle.$$

Ainsi, pour tout  $i \in [n]$ ,

$$f_{w_*, \hat{b}}(\psi(x_i)) = \phi(\langle w_*, \psi(x_i) \rangle + \hat{b}) = \phi(\langle \hat{w}, \psi(x_i) \rangle + \hat{b}) = f_{\hat{w}, \hat{b}}(\psi(x_i)).$$

$(\hat{w}, \hat{b})$  étant une solution par définition, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(y_i, f_{\hat{w}, \hat{b}}(\psi(x_i))) + \frac{\lambda}{2} (\|\hat{w}\|^2 + \hat{b}^2) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(y_i, f_{w_*, \hat{b}}(\psi(x_i))) + \frac{\lambda}{2} (\|w_*\|^2 + \hat{b}^2),$$

ce qui, en utilisant ce qui précède et le fait que  $\lambda > 0$ , se simplifie en :

$$\|\hat{w}\|^2 = \|w_*\|^2.$$

Or  $w_*$  étant la projection orthogonale de  $\hat{w}$ , on a :

$$\|w_*\|^2 + \|\hat{w} - w_*\|^2 = \|\hat{w}\|^2 = \|w_*\|^2.$$

Cela entraîne  $\|\hat{w} - w_*\|^2 = 0$ , autrement dit  $\hat{w} = w_*$ .

**EXERCICE 2.** — Pour  $1 \leq i, k \leq m$ ,

$$G_{ik} = K(x_i, x_k) = \langle \psi(x_i), \psi(x_k) \rangle = \langle \psi(x_k), \psi(x_i) \rangle = K(x_k, x_i) = G_{ki}.$$

$G$  est symétrique. Soit  $u \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{aligned} u^\top G u &= \sum_{1 \leq i, k \leq m} u_i K(x_i, x_k) u_k = \sum_{1 \leq i, k \leq m} u_i \langle \psi(x_i), \psi(x_k) \rangle u_k = \sum_{1 \leq i, k \leq m} \langle u_i \psi(x_i), \psi(x_k) u_k \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m u_i \psi(x_i), \sum_{k=1}^m u_k \psi(x_k) \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^m u_i \psi(x_i) \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$G$  est bien semi-définie positive.

