

TRAVAUX DIRIGÉS DE  
**MACHINE LEARNING**  
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES  
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

Joon Kwon

vendredi 26 mai 2023



**EXERCICE 1 (Adaboost).** — On se place dans un cadre de classification binaire, c'est-à-dire avec un ensemble d'entrées  $\mathcal{X}$  quelconque, et un ensemble de sorties  $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$ . Soit  $m, n \geq 1$  des entiers, et  $\gamma \in ]0, 1/2[$ . Soit  $S = (x_i, y_i)_{i \in [n]}$  un échantillon et  $\hat{f}^{(1)}, \dots, \hat{f}^{(m)} \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  des prédicteurs. On pose  $\pi^{(1)} = (1/n, \dots, 1/n)$  et pour  $k \in [m]$ , on définit par récurrence :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \pi_i^{(k)} \mathbb{1}_{\{y_i \neq \hat{f}^{(k)}(x_i)\}} \\ w^{(k)} &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} - 1 \right) \\ \pi^{(k+1)} &= \left( \frac{\pi_i^{(k)} \exp \left( -w^{(k)} y_i \hat{f}^{(k)}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^n \pi_j^{(k)} \exp \left( -w^{(k)} y_j \hat{f}^{(k)}(x_j) \right)} \right)_{i \in [n]},\end{aligned}$$

et on suppose que  $\varepsilon^{(k)} \leq \frac{1}{2} - \gamma$  pour tout  $k \in [m]$ . Pour  $0 \leq k \leq m$ , on pose

$$\hat{f}^{(1:k)} = \sum_{l=1}^k w^{(l)} \hat{f}^{(l)},$$

et considère le prédicteur  $\hat{f}$  défini par :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \hat{f}(x) = \text{sign} \left( \hat{f}^{(1:m)}(x) \right),$$

et on note  $\varepsilon_S(\hat{f})$  son erreur d'apprentissage :

$$\varepsilon_S(\hat{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{f}(x_i) \neq y_i\}}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que  $\varepsilon_S(\hat{f}) \leq e^{-2\gamma^2 m}$ .

Pour  $0 \leq k \leq m$ , on définit la quantité :

$$Z^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left( -y_i \hat{f}^{(1:k)}(x_i) \right).$$

1) Montrer que

$$\varepsilon_S(\hat{f}) \leq Z^{(m)}.$$

2) Montrer que pour  $0 \leq k \leq m$ ,

$$\pi^{(k+1)} = \left( \frac{\exp \left( -y_i \hat{f}^{(1:k)}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^n \exp \left( -y_j \hat{f}^{(1:k)}(x_j) \right)} \right)_{i \in [n]}.$$

3) Montrer que pour  $0 \leq k \leq m-1$ ,

$$\frac{Z^{(k+1)}}{Z^{(k)}} = 2\sqrt{\varepsilon^{(k+1)}(1 - \varepsilon^{(k+1)})}.$$

4) En déduire que

$$\varepsilon_S(\hat{f}) \leq e^{-2\gamma^2 m}.$$

